Le symbole ♡ indique un exercice dont la méthode et le résultat sont à connaître par cœur.

Exercice 1 : [F]
L'oral d'un concours comporte 100 sujets ; les candidats tirent au sort trois sujets et choisissent alors le sujet traité parmi ces trois sujets. Un candidat se présente en ayant révisé 60 sujets sur 100.

1. Quelle est la probabilité pour que le candidat ait révisé au moins un sujet ?
2. Quelle est la probabilité pour que le candidat ait révisé les trois sujets ?

Exercice 2 :
Une urne contient 8 boules numérotées de 1 à 8.
On tire successivement et avec remise des boules dans l'urne.
On note X_n le numéro de la boule tirée au tirage numéro n.
On note Y_n le nombre de boules tirées lors de ces n tirage dont le numéro est inférieur à 2.

1. Soit n un entier naturel non nul.
   (a) Donner la loi de X_n.
   (b) Donner l'espérance et la variance de X_n.
   (c) Calculer l'espérance de la variable aléatoire $Z = 2^{X_n}$.
2. Soit n un entier naturel non nul.
   (a) Déterminer la loi de Y_n.
   (b) Pour $k \in X(\Omega)$, donner $P(Y_n = k)$.
   (c) Pour quelles valeurs de n, $E(Y_n) \geq 8$?
3. Calculer $P([X_2 \geq 4] \cap [Y_2 = 2])$ et $P([X_2 \geq 5] \cap [Y_1 = 1])$.
4. Sur 5 tirages, quelle est la probabilité d'avoir eu 3 numéros inférieur à 2 sachant que le premier est inférieur à 2 ? Sur 5 tirages, quelle est la probabilité d'avoir eu 3 numéros inférieur à 2 sachant que le premier est supérieur à 4 ?

Exercice 3 :
Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n.
On extrait de l'urne simultanément 2 boules au hasard et on note X la variable aléatoire égale au plus grand numéro tiré.

1. Déterminer $X(\Omega)$.
2. Pour $k \in X(\Omega)$, calculer $P(X \leq k)$.
3. Déterminer la loi de X.
4. Calculer l'espérance de X.
   Indication : on a la formule
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 4 : [F]
On lance un dé parfaitement équilibré 7 fois. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où la face visible est un multiple de trois.

1. Préciser la loi de X.
2. Calculer $P(X \geq 1)$.
3. (a) Déterminer l'espérance de X.
   (b) Déterminer la variance de X.

Exercice 5 : [F]
Soit X une variables aléatoire finie de support $\{100, 101, \cdots, 121\}$ et telle que
$$P(X = 100) = P(X = 101) = \cdots P(X = 121).$$
Déterminer l'espérance et la variance de X.

Exercice 6 : [PD]
Soit X une variable aléatoire finie définie sur Ω et de support l'ensemble des k^2 pour $k \in \{0, 1, 2, \cdots, 11\}$ et telle que
$$P(X = 0) = P(X = 1) = P(X = 4) = \cdots = P(X = 11).$$

1. Quel est le cardinal de $X(\Omega)$.
2. (a) On note Z la variable de loi uniforme $\mathcal{U}([\![1; 12]\!])$. Montrer qu'il existe une fonction f telle que $X = f(Z)$.
   (b) En déduire l'espérance de X.
   (c) Calculer la variance de X.

Exercice 7 : [F]
Dans cet exercice, on donnera les valeurs à $0,01$ près.
Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(4; 0,5)$.

1. Donner la loi de X.
2. Dresser le diagramme en bâtons de la loi de X.
3. Tracer le graphe de la fonction de répartition de X.

Exercice 8 : [AD] ♡
Soit n un entier naturel non nul et $p \in]0; 1[$.

1. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$. Déterminer la variable aléatoire X^* centrée réduite associée à X. Quel est le support de X^* ?
2. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$. Déterminer la variable aléatoire X^* centrée réduite associée à X. Quel est le support de X^* ?
3. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. Déterminer la variable aléatoire X^* centrée réduite associée à X. Quel est le support de X^* ?

Exercice 9 : D'après BCE 2020

Une entreprise fabrique à la chaîne des cartouches d'imprimante. Charque cartouche a une probabilité p d'être défectueuse. En bout de chaîne, une machine détecte à coup sûr les cartouches défectueuses et les retire de la chaîne.

On suppose que l'on connaît la valeur de la probabilité p et qu'elle est égale à $\frac{2}{100}$. L'entreprise fabrique 100 cartouches par heures dont les défauts éventuels sont indépendants les uns des autres. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de cartouches défectueuses détectées en bout de chaîne durant cette période.

1. Reconnaître la loi de X. On donnera $X(\Omega)$ ainsi que l'expression de $P(X=k)$ pour tout entier k appartenant à $X(\Omega)$.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.

   La machine affiche chaque heure le nombre de cartouches défectueuses mais l'afficheur ne plus afficher la valeur 0. En revanche, il affiche normalement tous les autres nombres y compris 10, 20, etc. Lorsque X est égale à 0 il affiche au hasard n'importe quel nombre parmi les autres valeurs possibles de X. Soit Y la variable aléatoire égale à la valeur affichée.
3. On rappelle que l'instruction `grand(1,1,'bin',n,p` simule une loi binomiale de paramètres (n,p) et que l'instruction `grand(1,1,'uin',1,n` simule une loi uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket$. Recopier et compléter le programme suivant afin qu'il simule l'expérience ci-dessus et qu'il affiche les valeurs respectives de X et Y.

```
X = grand(1,1,...)
if X == 0 then Y = ...
      else Y = ...
end
disp(X), disp(Y)
```

Partie I : tirages dans une urne

Une urne $\mathcal{U}$ contient 1 boule noire et 3 boules blanches indiscernables au toucher.

1. On procède à 400 tirages successifs avec remise d'une boule dans $\mathcal{U}$. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de fois où la boule noire a été piochée.
   (a) Quelle est la loi de X ?
   On précisera $X(\Omega)$ et $P(X=k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$.
   (b) Donner la valeur de l'espérance de X notée $E(X)$ et vérifier que la variance de X, notée $V(X)$ est égale à 75.
2. Cette fois-ci, on pioche dans l'urne $\mathcal{U}$ successivement et sans remise les quatre boules. On note Z le numéro du tirage auquel est apparue la boule noire.
   (a) Quelle est la loi de Z ? On précisera $Z(\Omega)$ et $P(Z=k)$ pour $k \in Z(\Omega)$.
   (b) Donner les valeurs de $E(Z)$ et $V(Z)$.

Partie II : tirages dans une urne choisie au hasard

L'urne $\mathcal{U}$ contient toujours 1 boule noire et 3 boules blanches indiscernables au toucher. L'urne $\mathcal{V}$ contient 2 boules noires et 2 boules blanches indiscernables au toucher.

On lance une pièce équilibrée. Si elle retombe sur le côté Pile, on tire deux boules successivement et avec remise dans $\mathcal{U}$, et si on obtient Face, on tire deux boules successivement et avec remise dans $\mathcal{V}$.

On note T la variables aléatoire égale au nombre de fois où l'on a pioché une boule noire.

1. Que vaut $T(\Omega)$?
2. Donner la loi de T. On vérifiera que $P(T=1) = \frac{7}{16}$.
3. Calculer $E(T)$. La variable aléatoire T suit-elle une loi binomiale ?
4. Sachant que l'événement $[T=1]$ est réalisé, est-il plus probable d'avoir obtenu Pile ou d'avoir obtenu Face avec la pièce ?
5. On rappelle qu'en langage Scilab l'instruction `grand(1,1,"uin",n1,n2)` renvoie un entier au hasard et uniformément compris entre `n1` et `n2`. Compléter, sur votre copie, le programme Scilab suivant afin qu'il affiche une simulation de la variable aléatoire T.

```

T =  ..............
if grand(1,1,"uin",1,2) == 1 then
  for k = 1 : 2
    if grand(1,1,"uin",1,4)<2 then
      T = T + 1
    end
  end
else
  ..............
  ..............
  ..............
  ..............
  ..............
end
disp(T,"Une simulation de T donne : ")
```

Exercice 10 : [D] Allumettes de Banach

Banach était fumeur de pipe. Il avait toujours deux boîtes d'allumettes, l'une dans la poche gauche et l'autre dans la poche droite.

Chaque fois qu'il allumait sa pipe, il puisait au hasard dans l'une des boîtes. Immanquablement, au bout d'un certain temps, il prenait la dernière allumette d'une boîte. Inquiet, il jetait toujours un regard dans l'autre boîte.

- **Problème :** on suppose que les deux boîtes sont chargées simultanément et qu'elles contiennent initialement n allumettes. Quel est, en moyenne, le nombre d'allumettes restantes dans l'autre boîte lorsque l'une est vide ?

On note X_n la variable aléatoire qui compte le nombre d'allumettes restantes et $E(X_n)$ son espérance.

1. Déterminer $X_n(\Omega)$.
2. **Simulation**
   Le problème n'est, mathématiquement, pas facile. Nous allons tout d'abord le simuler afin d'évaluer cette espérance.
   (a) Complèter le programme Scilab suivant pour qu'il simule le tirage des allumettes dans des boîtes contenant n allumettes où n est entré par l'utilisateur et affiche le nombre d'allumettes restantes. Les variables **`allumettes1`** et **`allumettes2`** désignent les nombres d'allumettes restant dans les boîtes 1 et 2 :

```
n=input('donner le nombre d allumettes')

allumettes1 = n
allumettes2 = n

while ............ & ..............
    if rand()< 0.5
        allumettes1=allumettes1-1
    else
        allumettes2=..........
    end
end

r = ...................

disp(r)
```

   (b) On simule maintenant 100 fois les tirages de ces allumettes. Complèter le programme suivant pour qu'il renvoie le nombre moyen d'allumettes restantes :

```
n=input('donner le nombre d allumettes')
Somme = 0
for k = 1:100
    allumettes1 = n
    allumettes2 = n

    while .........................
        if rand()<0.5
            .........................
        else
            .........................
        end
    end
    Somme = .........................
end

disp(Somme/100)
```

3. **Calcul exact de l'espérance**
   On note :
   - B_1 l'évènement : « Banach tire la dernière allumettes de la boîte dans sa poche droite » ;
   - B_2 l'évènement : « Banach tire la dernière allumettes de la boîte dans sa poche gauche. »

   (a) Soit $k \in X_n(\Omega)$. On suppose que l'évènement $[X_n = k] \cap B_1$ est réalisé. Combien d'allumettes Banach a-t-il utilisé ? Combien provenait de sa poche gauche, combien de sa poche droite ?
   (b) Soit $k \in X_n(\Omega)$. Montrer que

$$P([X_n = k]) = \frac{1}{2^{2n-1-k}} \binom{2n-k-1}{n-1}$$

   (c) En déduire l'espérance de $E(X_n)$.
   (d) Calculer $E(X_4)$.